数理解析研究所講究録
564巻 1985年 115-133

LiPSシステムにおける最適化問題

工学院大·機械系　山崎 源治 (Genji YAMAZAKI)
筑波大·社会工学系　逆瀬川浩孝 (Hirotaka SAKASEGAWA)

1. はじめに

従来，待ち行列システムの最適化問題は，どのような状態でどのような手を打つべきか，その最適政策の存在条件は，というような，いわゆる'動的'問題が中心に議論されてきた(例えば，Kleinrock [2])．一方，システム設計の目安となるような'静的'問題に関する研究は，Stidham [5]，Brumelle [1]，を除いてあまり見当らないように思われる。[1]，[5]では，待ちを尺度に，能力(レート)1の単一サーバシステムとレート1/mのm-サーバシステムの比較が行われた。その結果，もし客のサービス時間分布の変動係数(C_s)が1より小さければ，単一サーバシステムの方が$m(\geq 2)$-サーバシステムよりもすぐれていることが明らかになった。この結果の直感的な解釈は，単一サーバシステムでは，システム内に1人でも客がいるときは常にレート1で仕事をするが，m-

サーバシステムでは，システム内にm人以上の客がいるときのみレート1で仕事をし，それがm人未満のときは1より小さいレートで仕事をする，ということである。これによると，$C_s>1$でも同様の結果が成立するように思われるが，反例がだされていて（〔1〕），この場合の単一サーバシステムが有効となる条件は未だ明らかにされていない。

上述の単一サーバシステムと複数サーバシステムの比較は，後者についてもしシステム内の客数がサーバ数未満であれば'手空きのサーバ'の存在を許す，という規律のもとで行われた。それ故，より強い条件：複数サーバシステムでシステム内に客が1人でも存在するときは手空きのサーバの存在は許さない，すなわち手空きのサーバは他へ手伝いに行く，という規律のもとで単一サーバシステムの有効性が保たれるか，否か，という問題が次に生じてくる。〔6〕で筆者は，この規律及び有限の多重度を持つタイム・シェア処理をLimited Processor Sharing（LiPS）規律として定式化し，LiPS規律のもとで単一サーバシステムの有効性が保たれるか，否か，を議論した。そして理論的，数値的な結果から次の予想を与えた。

<u>予想：</u>　客のサービス要求量の変動係数をC_sとする。LiPS

規律のもとで，$C_s<1$ なら単一サーバシステムの有効性は成立するが，$C_s>1$ では成立しない。ここでの有効性の尺度は，平均システム内客数（等価的に客の平均滞留時間）である。

[6]では，客のシステムへの到着過程が任意のもとで，客のサービス要求量の分布がNWUかErlang分布のとき上の予想が成立することを証明している。

本稿では，客のシステムへの到着がPoisson過程の場合に的を絞り，サービス要求量の分布がより広いクラス（すなわち，NBUE，NWUE）でも上述の予想が成立することを証明する（§4.2）。さらに，LiPS規律のもとでの平均システム内客数の近似式を与える（§4.3）。これらはすべて，点過程の保存則による'平衡式'を基に導かれる。この近似式の精度を幾つかの数値例で明らかにする（§5）。§2では本稿で扱うモデルを説明し，§3では，[6]で得られた基礎的結果を与える。

2. モデル・記号

本稿では次の待ち行列システムを扱う。システム内のスペースを適当に分割し，前から順に positions 1,2,… と番号づけ

をする。各 position には1度に1人の客のみ入ることができる。システム内に n 人の客がいるとき，(a) 到着した客は，position $n+1$ へ入る，(b) position j $(j=1,2,\cdots,n)$ の客のサービスが終了したなら，positions $j+1, j+2, \cdots, n$ の客は順に positions $j, j+1, \cdots, n$ へ移る。m をある自然数とし，この m に対して $\{r_j(n;m)\ ;\ j=1,2,\cdots,n\ ;\ n=1,2,\cdots\}$ を次のように定義する。

(i) $0 \leq r_j(n;m)$ $(\forall j, n)$，(ii) $\sum_j r_j(n;m) = 1$ $(\forall n)$，
(iii) $r_j(n;m) = 0$ $(j > m)$.

このとき，次のサービス規律を設定し，これを m-LiPS 規律と呼ぶことにする。さらに，m-LiPS 規律のもとで客を処理するシステムを，m-LiPS システムと呼ぶ。

<u>m-LiPS 規律</u>：システムには唯一のサーバがいて，その能力はレート1．システム内に n 人の客がいるとき，このサーバは，position j の客にその能力を $r_j(n;m)$ だけ振り向ける。

上で定義した m-LiPS システムで，客の到着過程，サービス要求量の分布[(*-1)]を明示したいときは，通常のケンドール

の記号にならい，A/B/1（m-LiPS）を用いることにする。このとき，任意の到着過程，サービス分布を表わすために'G'を用い，独立性を明示するときは'GI'を用いることにする。

実際の待ち行列システムの幾つかは，このm-LiPSシステムの特別な場合とみなすことができる。その例を次に示す。

例.1：$m=1 \Rightarrow G/G/1$.

例.2：$m=\infty$，$r_j(n;\infty)=1/n$（$j=1,2,\cdots,n$; $\forall n$）$\Rightarrow$ 積形式解を持つ待ち行列ネットワークでよく用いられている Processor Sharing 規律（定義ではmを自然数としていたが，便宜上$m=\infty$も用いることにする）。

例.3：$r_j(n;m)=1/n$（$n\leq m$），$r_j(n,m)=1/m$（$n>m$）
$\Rightarrow$ 計算機のCPUなどでの，多重度mのタイム・シェア処理方式。

もちろん，§1の手空きサーバを許さないm-サーバシステムも，$r_j(n;m)$を適当に与えることにより実現できる。

以下で用いる主な記号は，次のものである。

$L(t;m)$: m-LiPSシステムでの時刻tでのシステム内客数,
$L(m)$: 〃 定常状態 〃 ,
$U(t;m)$: 〃 時刻tでの残り仕事量の和.

XとYを確率変数としたとき,

$X \overset{st}{=} Y$: XとYは確率的に等しい, すなわち $P_r(X \le x) = P_r(Y \le x)$ $(\forall x)$,

$X \overset{st}{\le} Y$: $P_r(X > x) \le P_r(Y > x)$ $(\forall x)$.

非負の確率変数Xの分布関数を$F(\cdot)$, $\tau > 0$に対して次の分布関数$F_\tau(\cdot)$に従う確率変数をX_τとする.

$$\bar{F}_\tau(x) \triangleq \bar{F}(x+\tau)/\bar{F}(\tau) \quad (x \ge 0,\ \tau > 0),$$

ここで, $\bar{F}_\tau(x) = 1 - F_\tau(x)$, $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$.

このとき, 本稿では次の分布関数のクラスを考える.

定義 : (a) Fは New Better than Used (NBU) ;
$X_\tau \overset{st}{\le} X$,

(b) Fは New Better than Used in Expectation (NBUE), $EX_\tau \le E(X)$ $(0 < \tau < \infty)$.

(a), (b) の不等号が逆向きのとき，Fは (a') NWU，(b') NWUE，であるという。 NBU ⊂ NBUE，NWU ⊂ NWUEであり，FがNBUE (NWUE) のときその変動係数は1より小さい（大きい）。

3. 基礎的結果

本節では，[6] で証明された m-LiPS システムに関する結果のみを列挙する。ただし，以下では $L(0-;m)=0$ とする。

定理1： G/G/1 (m-LiPS)，G/G/1 (1-LiPS) に対して，

(1) $\quad U(t;m) \overset{st}{=} U(t;1) \qquad (t>0).$

この定理から，直ちに次の2つの系を得ることができる。

系1： m-LiPS システムの平衡条件は 1-LiPSのそれと一致する。

系2： m-LiPS システムの busy/idle 時間の分布は，1-LiPS システムのそれらと一致する。

上の結果は，§1 の予想に直接関連したものではないが，

次の2つの結果はその予想を支持するものである。

定理2：G/GI/1（m-LiPS）でサービス要求量の分布がNWUなら，

（2）　$L(x;m) \overset{st}{\leq} L(x;1)$　$(x>0)$.

サービス要求量の分布がNBUのとき，定理2と対をなす結果は証明されていないが，NBUのサブクラスである k-Erlang 分布に関して次の結果が成立する。

定理3：G/GI/1（m-LiPS）で $GI=E_k$ なら，任意の k で

（3）　$L(x;m) \overset{st}{\geq} L(x;1)$　$(x>0)$,

等号は $k=1$ で成立.

4. M/GI/1（m-LiPS）

本節では，客のシステムへの到着が到着率λのPoisson過程で定常状態のみを考える。この後者のための条件は，客のサービス要求量を確率変数Sで表わしたとき，$\rho \triangleq \lambda E(S)<1$ となる（系1）。通常のM/GI/mの平均システム内客数の近似式は多数の研究者により提案されてきているが，それらの大部分は，経験・直感により未知パラメータを含む式の形を想定

し，数値実験によりそれらのパラメータを決定，という手順で得られている。しかし，本節では，Miyazawa [4] で試みられた方法にならい，$E(L(m))$ の近似式を導く。すなわち，点過程の保存則から得られるシステム内　　客数に関する一種の平衡方程式を作り（§4.1），それから $E(L(m))$ の厳密解を未知量を含んだ形で導く。その後，ある仮定のもとで $E(L(m))$ の近似式を作る（§4.3）。さらに，$E(L(m))$ の厳密解から $E(L(m))$ と $E(L(1))$ の順序関係も導かれる（§4.2）。

4.1　平衡式の誘導

本節で用いる主な記号は，次の通りである。

P：任意時点での確率（$E(\cdot)$，その期待値），
P_0：時刻 0 に客の到着があったという条件付確率（その期待値 $E_0(\cdot)$），
P_1：　〃　退去　〃　（〃 $E_1(\cdot)$），
$p_n = P(L(0;m)=n)$，$p_n^0 = P_0(L(0-;m)=n)$，$p_n^* = P_1(L(0+;m)=n)$，
$\tilde{G}(\theta) = E(e^{-\theta S})$，$\phi_n(\theta) = E(e^{-\theta U(0;m)} \mid L(0;m)=n)$，
$\phi_n^0(\theta) = E_0(e^{-\theta U(0;m)} \mid L(0-;m)=n)$，$\phi_n^*(\theta) = E_1(e^{-\theta U(0;m)} \mid L(0+;m)=n)$.

以上の準備のもとで平衡式をたてるが，その出発点は Miyazawa [3] による次の結果である。

補助定理1：$\{X(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ を任意時点で右微分可能で，その不連続点が有限区間で有限個であるような標本関数を持つ定常過程とする。このとき $\{X(t)\}$ の不連続点からなる定常過程を Y，その Palm 分布を P_Y とし，P_Y に関する $X(0-)$ の期待値 $E_Y\{X(0-)\}$ が有限ならば次式が成立する。

(4) $$E\{X'(0)\} = \nu\left[E_Y\{X(0-)\} - E_Y\{X(0+)\}\right],$$
ここで，$\nu = E\{Y(0,1]\}$，$X'(0) = \frac{d^+}{dt}X(t)\Big|_{t=0}$.

我々が考えている M/GI/1(m-LiPS) に関して $X_n(t)$ を次のように定義する。

$$X_n(t) \triangleq I_{\{L(t;m)=n\}}\exp\{-\theta U(t;m)\}.$$

ここで，I_A：集合 A の指示関数.

この $X_n(t)$ は補助定理1の条件をみたす。Y を到着と退去の2種類に分けると $\nu = 2\lambda$ となること，m-LiPS では $\sum_j r_j(n;m)=1$ より $U(t;m)$ はシステム内に1人でも客がいるときはレート1で減ること，M到着のため $p_n = p_n^o = p_n^*$，$\phi_n(\theta) = \phi_n^o(\theta)$ であること，を用いると上の補助定理から次の'平衡式'を得ることができる（その詳細は省略）。

定理4： M/GI/1(m-LiPS) では次式が成立する。

$$(5)\quad \theta\phi_1(\theta)p_1 = \lambda(1-\tilde{G}(\theta))p_0 + \lambda(\phi_1(\theta)-\phi_1^*(\theta))p_1,$$

$$\theta\phi_n(\theta)p_n = \lambda[\phi_{n-1}^*(\theta) - \tilde{G}(\theta)\phi_{n-1}(\theta)]p_{n-1} + \lambda[\phi_n(\theta)-\phi_n^*(\theta)]p_n \quad n=2,3,\cdots.$$

$\psi(\theta,x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(\theta)p_n x^n$, $\psi^*(\theta,x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^*(\theta)p_n x^n$ $(|x|<1)$ とすると，(5)式から通常の母関数を導く方法により次の結果を得る。

系3：

$$(6)\quad \psi(\theta_1,x) = \frac{-\theta_1\psi^*(\theta_1,x) + \lambda x[1-\tilde{G}(\theta_1)]p_0}{\theta_1 + \lambda x\tilde{G}(\theta_1) - \lambda},$$

ここで，$\theta_1 \triangleq \lambda(1-x)$.

(6)式の両辺をxで微分し，$\theta_1 \to 0\ (x \to 1)$とし，定理1から $\sum_{n=1}^{\infty}E\{U(0;m)|L(0;m)=n\}p_n = W_q(1)$ ($W_q(1)$はM/GI/1での平均待ち時間)，系2から $p_0 = 1-\rho$ となることを用いると，次の結果を得る。

系4：M/GI/1 (m-LiPS) では次式が成立する。

$$(7)\quad E\{L(m)\} = \frac{\rho\{2+\rho(1+C_s^2)\}}{2(1-\rho)} + \frac{\rho L_q(1) - L^*(m)}{1-\rho}$$

ここで，$L_q(1) \triangleq \lambda W_q(1)$, $L^*(m) \triangleq \lambda\sum_{n=1}^{\infty}E_1\{U(0;m)|L(0+;m)=n\}p_n$.

4.2 L(1)とL(m)の比較

(7)式の右辺の未知量は，サービス要求量の分布$(B(\cdot))$が与えられたとき，$L^*(m)$のみである。時刻0である客の退去があったという条件のもとで，その直後のposition $j\ (j \leq m-1)$の客の以前からサービスを受けた量をx_jとし，退去直後の人数がnのときの$\bar{x}_n = (x_1, x_2, \cdots, x_{n\wedge(m-1)})$の同時分布を$G_n(\bar{x}_n)$とする。ここで，$a \wedge b = \min(a, b)$。このとき，BをNBUEとすると，$E_1$の定義から次の不等式を得る。

$$(8) \qquad E_1\{U(0;m) \mid L(0+;m) = n\} = \int \sum_{j=1}^{n\wedge(m-1)} \frac{\int_0^\infty \bar{B}(\tau + x_j)\,d\tau}{\bar{B}(x_j)}\, dG_n(\bar{x}_n)$$

$$+ \{n - n\wedge(m-1)\} E(S) \leq n E(S),$$

ここで，$\bar{B}(\cdot) = 1 - B(\cdot)$。

$B \in$ NWUEのとき，(8)の不等号は逆になる。これと(7)から直ちに次の結果を得る。

定理5: M/GI/1 (m-LiPS)で，サービス要求量の分布がNBUE (NWUE)なら，

$$(9) \qquad E\{L(m)\} \underset{(\leq)}{\geq} E\{L(1)\}.$$

(9)は，§1での予想が（到着がMの場合に限られてはいるが），[6]で証明された場合よりもより広いサービス分布のクラスについても成立することを示している。

4.3 $E\{L(m)\}$の近似式

前節までの議論で注意しなければならないことは，$r_j(n;m)$については具体的に与えず，§2での条件(i)〜(iii)をみたせば十分，ということである。それ故，$L(m)$に関して得られる結論は主に定性的性質（例えば，定理5），ということになる。$L(m)$の定性的な特性と並行して，$L(m)$の定量的評価，すなわち$E\{L(m)\}$がmによりどの程度影響を受けるか，という情報を持つことは，大きなメリットを持つ。これは，例えば計算機システムの評価で，タイム・シェア処理方式のモデル化として仮定されているProcessor Sharing規律（m-LiPSで$m=\infty$の場合に相当）が，実際の待ちをどの程度過小（過大）評価することになるか，の1つの目安となる。それ故，本節では，(7)式を基にして$E\{L(m)\}$の近似式を求めている（以下では，便宜上，$E\{L(m)\}$を単に$L(m)$と記す）。m，Bが与えられたとしても，$L(m)$は$r_j(n;m)$の設定によりかなり異なると考えられる。例えば，$r_j(n;m)>r_{j+1}(n;m)$（これは古い客により能力をふり向ける規律に相当）と$r_j(n;m)<r_{j+1}(n;m)$の場合の

ように。本節では，$r_j(n;m)$を次のように設定した場合を考える（これは，m−多重度の通常にタイム・シェア処理方式に対応する）．

規律1：$r_j(n;m)=1/m$　$(j=1,2,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots,m)$，$r_j(n;m)=1/m$ $(n>m)$．

この規律のもとで，M/GI/1 (m-LiPS) の$L(m)$の近似式を求めるためには，(7)式の右辺の$L^*(m)$の近似式を与えれば十分である。$L^*(m)$の近似的評価のために，次の仮定を設ける。

仮定1：$E\{U(0;m)\,|\,L(0;m)=n\}=E_1\{U(0;m)\,|\,L(0+;m)=n\}$
$1\leq n\leq m-1$，

仮定2：$E\{U(0;m)|L(0;m)=n\}+E(S)=E_1\{U(0;m)\,|\,L(0+;m)=n\}$
$+\,E(S^2)/2E(S)$　　$n\geq m$．

仮　1，2を設けた理由は次の通りである。任意時点，退去直後にn人の客がいるという条件のもとでの残り仕事量の平均は，$n\leq m-1$では共にすべての客が以前からサービスを受けているために等しい（仮定1）。一方，$n\geq m$では，任意時点ではpositions 1，2，…，mまでの客が以前からサービスを受けて

いるが，退去直後では positions 1, 2, …, $m-1$ の客は以前からサービスを受けているが，position m の客は新しいサービスが始まる（その客のサービス要求量の期待値は $E(S)$）。もちろん，両時点で positions $m+1, \dots, n$ の客は未だサービスを受けていない客である。従って，$n \geq m$ での $E\{U(0;m) \mid L(0;m)=n\}$ と $E\{U(0;m) \mid L(0+;m)=n\}$ の差は，以前からサービスを受けている客 m 人分の平均残り仕事量と，以前からサービスを受けている客 $m-1$ 人と新しいサービスを受ける客の平均残り仕事量，との差ということになる。規律1はある意味で各 position の残り仕事量を公平にするものであることを考慮して，この差を，'residual サービス要求量' の平均と $E(S)$ の差とおきかえたのが，仮定2である。

仮定2から直ちに次式を得ることができる。

$$(10) \qquad L_q(1) - L^*(m) = \frac{\rho(C_S^2-1)}{2} \sum_{n=m}^{\infty} p_n .$$

(5) 式で，$n=1, 2, \dots, m-1$ について両辺を θ で割り，$\theta \to 0$ として仮定1 を適用することにより，$p_n = \rho p_{n-1}$ $(n=1, 2, \dots, m-1)$ が得られ，その結果 $\sum_{n=m}^{\infty} p_n = \rho^m$ となる。これと (10) を (7) 式の右辺に代入することにより，$L(m)$ に対する次の近似式を得ることができる。

$$(12)\quad L_{app.}(m) = \frac{\rho}{2(1-\rho)}\left\{2+\rho^{m}(C_s^2-1)\right\}.$$

(12)の$L_{app.}(m)$は，$m=1$のときexactになる。また$m=\infty$では，仮定1が常に成立することから(12)はexactになる。$C_s^2<1$のときの$L_{app.}(2)$の精度をチェックするため，$M/E_2/1$(2-LiPS)について考えてみる。詳細は省略するが，この場合の$L(2)$は母関数から求めることができ，その結果，(12)の$L_{app.}(2)$は$M/E_2/1$(2-LiPS)に対してもexactになることは興味深い。以上により，(12)の$L_{app.}(m)$は，$C_s^2<1$のとき$L(m)$に対するかなりよい近似式となることが期待できる。

$C_s^2>1$のときの$L_{app.}(2)$の精度をチェックするため，サービス要求量の分布が超指数分布，すなわちその密度関数$b(t)$が次の場合($M/H_2/1$(2-LiPS))を考えてみる。

$$(13)\quad b(t) = 2\alpha^2\mu e^{-2\alpha\mu t} + 2(1-\alpha)^2\mu e^{-2(1-\alpha)\mu t} \qquad t\geq 0,$$
$$0\leq\alpha\leq\tfrac{1}{2},\quad \tfrac{1}{\mu}=E(S).$$

この場合も母関数から$L(2)$を計算することができる。その結果によると，$L_{app.}(2)-L(2)$は正で，C_s^2が大きくなるとその差も大きくなる。$L_{app.}(m)$の実際の精度は，次節の数値

例で明らかにする。

5．数値例

前節の終りで述べたように，(12) の $L_{app.}(m)$ は，$C_s^2<1$ のときかなりよいことが期待できる。1例として，$M/E_3/1$ (m-LiPS) の $L(m)$ と $L_{app.}(m)$ の比較を，$\rho=0.1,\ 0.5,\ 0.9$，$m=1\sim8$ の場合を，Table の (a) に示す。この表によると，期待通り，$L_{app.}(m)$ は ρ の全域，任意の m について非常によい近似となっている。

一方，$C_s^2>1$ については，(13) 式の α の設定により C_s^2 をかえることができる。$C_s^2=3,\ 9$ についての $L(m)$ と $L_{app.}(m)$ の比較を Table の (b)，(c) に示す。C_s^2 が大きくなると，$L_{app.}(m)$ と $L(m)$ の誤差は大きくなるが，$C_s^2=3$ 程度では $L_{app.}(m)$ の精度は実用上十分と考えられる．

(※-1)：通常の待ち行列の用語では，サービス時間分布を用いるが，その定義は，客がサービスを受け始めてから終了するまでに要する時間の分布である。一方，LiPS規律のように，客のサービスレートが状態により変わる場合は，上の定義では不十分であり，この場合は，各客は個有の仕事量（レート1のもとでの時間）を持って来ると考えるべきである。

Table1. (a) $M/E_3/1$ (m-LiPS) の $L(m)$, $L_{app.}(m)$

$C_s^2 =$ .333

Upper value: $L(m)$
Lower value: $\{L_{app.}(m) - L(m)\} \times 100 / L(m)$

m	ρ = .10	.50	.90
1	.1074	.8333	6.3000
	.0	.0	.0
2	.1107	.9167	6.5700
	.0	.1	.0
3	.1111	.9583	6.8130
	.0	.1	.0
4	.1111	.9792	7.0317
	.0	.1	.0
5	.1111	.9896	7.2285
	.0	.0	.0
6	.1111	.9948	7.4057
	.0	.0	.0
7	.1111	.9974	7.5651
	.0	.0	.0
8	.1111	.9987	7.7086
	.0	.0	.1

(b) $M/H_2/1$ (m-LiPS) の $L(m)$, $L_{app.}(m)$

$C_s^2 =$ 3.000

m	ρ = .10	.30	.50	.70	.90
1	.1222	.5571	1.5000	3.9667	17.1000
	.0	.0	.0	.0	.0
2	.1122	.4671	1.2500	3.4767	16.2900
	.9	1.7	2.1	1.2	.2
3	.1112	.4401	1.1250	3.1337	15.5610
	.0	.8	2.0	1.7	.3
4	.1111	.4320	1.0625	2.8936	14.9049
	.0	.3	1.4	1.8	.4
5	.1111	.4296	1.0313	2.7255	14.3144
	.0	.1	.9	1.7	.5
6	.1111	.4289	1.0156	2.6078	13.7830
	.0	.0	.5	1.5	.6
7	.1111	.4287	1.0078	2.5255	13.3047
	.0	.0	.3	1.2	.6
8	.1111	.4286	1.0039	2.4678	12.8742
	.0	.0	.1	1.0	.7
9	.1111	.4286	1.0020	2.4275	12.4868
	.0	.0	.1	.7	.7
10	.1111	.4286	1.0010	2.3992	12.1381
	.0	.0	.0	.6	.7

(C) M/H_2/1 (m-LiPS) の L(m), $L_{app.}$(m)

ρ $\qquad$ C_s^2 = 9.000

m	.10	.30	.50	.70	.90
1	.1556 .0	.9429 .0	3.0000 .0	8.8667 .0	41.4000 .0
2	.1156 1.5	.5829 7.8	2.0000 8.1	6.9067 3.7	38.1600 .4
3	.1116 .2	.4749 4.4	1.5000 9.3	5.5347 6.0	35.2440 .8
4	.1112 .0	.4425 1.7	1.2500 7.2	4.5743 7.2	32.6196 1.2
5	.1111 .0	.4327 .6	1.1250 4.7	3.9020 7.5	30.2576 1.5
6	.1111 .0	.4298 .2	1.0625 2.7	3.4314 7.1	28.1319 1.8
7	.1111 .0	.4289 .1	1.0313 1.5	3.1020 6.2	26.2187 2.1
8	.1111 .0	.4287 .0	1.0156 .8	2.8714 5.2	24.4968 2.3
9	.1111 .0	.4286 .0	1.0078 .4	2.7100 4.2	22.9471 2.5
10	.1111 .0	.4286 .0	1.0039 .2	2.5970 3.3	21.5524 2.7

〈参考文献〉

[1] Brumelle,S., "Some inequalities for parallel-server queue," Operations Research, 19 (1971), 402-413.

[2] Kleinrock,L., Queueing Systems Vol. 2, (1976), John Wiley.

[3] Miyazawa,M., "The derivation of invariance relations in complex queueing systems with stationary inputs," Adv. Appl. Prob. 15 (1983),874-885.

[4] Miyazawa,M., "Approximations of the queue length distributions by the basic equations I: Case of M/GI/s queues," Research Reports of Department of Information Sciences, Dec. (1984),Science University of Tokyo.

[5] Stidham,S., "On the optimality of single-server queueing systems," Operations Research, 18 (1970), 708-732.

[6] Yamazaki,G. and Sakasegawa,H., "An Optimal Design Problem of Limited Processor Sharing Systems," Institute of Socio-Economic Planning Discussion Paper Series,No.246 (1984), University of Tsukuba.